Par suite $f \circ f \circ f(O) = O \Leftrightarrow f \circ f(O_1) = O \Leftrightarrow \underline{f(O_2) = O}$.

**b-** • $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$ donnent $O_1O_2 = OO_1$ $(*)$

• $O_1 = f(O)$ et $f(O_2) = O$ donnent $OO_1 = OO_2$ $(**)$

Ainsi : $(*)$ et $(**) \Rightarrow$ le triangle $OO_1O_2$ est équilateral

$\odot$ $OO_1 = OO_2 \Rightarrow$ O appartient à la médiatrice de $[O_1O_2]$

$\boxplus$ $O_2 = f(O_1) \Rightarrow IO_1 = IO_2 \Rightarrow I \in \text{med}[O_1O_2]$

**Conclusion :** (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

**4/a-**

$$\left\{\begin{array}{l} r \text{ est un déplacement d'angle } \dfrac{2\pi}{3} \\ f \text{ est un déplacement d'angle } \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow g = f \circ r \circ f$ déplacement d'angle $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3} = 2\pi \equiv 0[2\pi]$

$\Rightarrow g = f \circ r \circ f$ est une translation ( l'identité est une translation de vecteur nul )

• $g(O_2) = f \circ r[f(O_2)] = f \circ r(O) = f(O) = O_1$.

D'où $g(O_2) = O_1$.

* g est une translation et $g(O_2) = O_1$

$\Rightarrow g = t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{O_2O_1}$.

**b-** • OB=OC car O est le centre du cercle (C) qui contient B et C.

• $\widehat{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)} \equiv 2\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}$ $[2\pi] \equiv \dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

car $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} OB = OC \\ \widehat{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)} \equiv \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow r(B) = C.$$

$\boxtimes$ $g(P) = f \circ r[f(P)] = f \circ r(B) = f(r(B)) = f(C) = Q$

Ainsi $g(P) = Q$.

**c-** $g(P) = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{O_2O_1}$

Donc $(PQ) // (O_2O_1)$

Or (OI) est perpendiculaire à $(O_2O_1)$ ( car (OI)=med$[O_2O_1]$ )

**En conclusion** : les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

**5/a-** $s(I) = O_1 \Rightarrow \dfrac{OO_1}{OI}$ est le rapport de s.

• d'abord $OIO_1$ est isocèle en I car $f(O) = O_1$.

$\Rightarrow 2\widehat{IOO_1} + \widehat{OIO_1} = \pi$